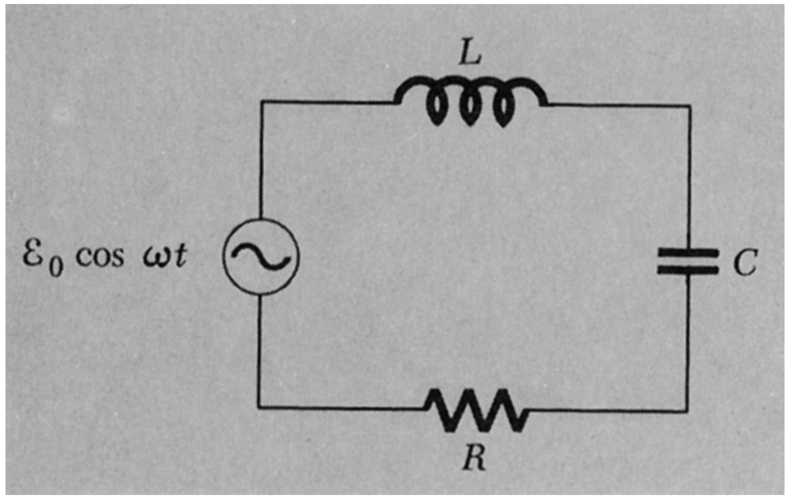
Circuito RLC: ressonância



$$L\frac{dI}{dt} + RI + \frac{q}{C} = \epsilon_0\, cos(\Omega t)$$

$$L\frac{d^2 I}{dt^2} + R\frac{dI}{dt} + \frac{I}{C} = -\Omega\epsilon_0\, sin(\Omega t)$$

Solução geral: $I(t) = I_h(t) + I_p(t)$

Solução homogênea: $$L\frac{d^2 I_h}{dt^2} + R\frac{dI_h}{dt} + \frac{I_h}{C} = 0$$

$I_h(t) \rightarrow 0$ para $t \rightarrow \infty \quad (t >> \frac{2L}{R}) \quad \Rightarrow \quad I(t) \approx I_p(t)$

Solução particular satisfaz a equação:

$$L\frac{d^2 I_p}{dt^2} + R\frac{dI_p}{dt} + \frac{I_p}{C} = \frac{d\epsilon}{dt} = -\Omega\epsilon_0\, sin(\Omega t)$$

A solução particular é oscilatória e periódica, com período $T = \dfrac{2\pi}{\Omega}$

Definimos $\tilde{\epsilon}(t) = \epsilon_0 \, e^{i\Omega t} \quad \Rightarrow \quad \epsilon(t) = Re\,[\,\tilde{\epsilon}\,]$

Resolvemos a equação: $L\dfrac{d^2\tilde{I}_p}{dt^2} + R\dfrac{d\tilde{I}_p}{dt} + \dfrac{\tilde{I}_p}{C} = \dfrac{d\tilde{\epsilon}}{dt} = i\Omega\epsilon_0 \, e^{i\Omega t}$

A solução desejada $I_p(t) = Re\,[\,\tilde{I}_p(t)\,]$, pois $Re\,[\,\dfrac{d\tilde{\epsilon}}{dt}\,] = -\Omega\epsilon_0 \, sin(\Omega t)$

Tentamos a solução: $\tilde{I}_p(t) = \tilde{I}_0 \, e^{i\Omega t} \quad \Rightarrow$

$$\left(-\Omega^2 L + i\Omega R + \frac{1}{C}\right)\tilde{I}_0 \, e^{i\Omega t} = i\Omega\epsilon_0 \, e^{i\Omega t}$$

$$\Rightarrow \quad \left(R + i\Omega L + \frac{1}{i\Omega C}\right)\tilde{I}_0 \, e^{i\Omega t} = \epsilon_0 \, e^{i\Omega t} = \tilde{\epsilon}(t)$$

Definimos a impedância $Z = \left(R + i\Omega L + \dfrac{1}{i\Omega C}\right)$

Definimos a impedância $Z = \left(R + i\Omega L + \frac{1}{i\Omega C}\right) = R + i\left(\Omega L - \frac{1}{\Omega C}\right)$

$Z = R + iX$ **onde a reatância** $X = \Omega L - \frac{1}{\Omega C} = X_L + X_C$

$X_L = \Omega L$ (reatância indutiva) $\qquad X_C = -\frac{1}{\Omega C}$ (reatância capacitiva)

$$\Rightarrow \quad Z\tilde{I}_0\, e^{i\Omega t} = \epsilon_0\, e^{i\Omega t} \quad \Rightarrow \quad Z\tilde{I}_0 = \epsilon_0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{\tilde{I}_0 = \frac{\epsilon_0}{Z}}$$

A impedância Z pode ser vista como "resistência complexa"

$$Z = R + iX = |Z|\, e^{i\theta}; \qquad |Z| = \left(R^2 + X^2\right)^{1/2}$$

$$\theta = \arctan\left(\frac{X}{R}\right) = \arctan\left(\frac{\Omega L - \frac{1}{\Omega C}}{R}\right)$$

Nossa solução $\tilde{I}_p(t) = \tilde{I}_0\, e^{i\Omega t} = \frac{\epsilon_0}{Z}\, e^{i\Omega t} = \frac{\epsilon_0}{|Z|}\, e^{i(\Omega t - \theta)}$

$$\boxed{I_p(t) = Re\,[\,\tilde{I}_p(t)\,] = \frac{\epsilon_0}{|Z|}\cos(\Omega t - \theta) = A\cos(\Omega t - \theta)}$$

Note que:

- $I_p(t)$ está defasado em relação a fonte de tensão $\epsilon(t) = \epsilon_0\ \cos(\Omega t)$

- Tanto a amplitude da corrente quanto a defasagem dependem de Ω

$$A = A(\Omega) \qquad \theta = \theta(\Omega)$$

- $A(\Omega)$ tem um máximo

$$A(\Omega) = \frac{\epsilon_0}{|Z|} = \epsilon_0\,[R^2 + (X_L + X_C)^2]^{-1/2}$$

$$\frac{dA}{d\Omega} = -\frac{\epsilon_0}{2}\,[R^2 + (X_L + X_C)^2]^{-3/2}\, 2(X_L + X_C)\,(\frac{dX_L}{d\Omega} + \frac{dX_C}{d\Omega})$$

Tendo em vista que $$\frac{dX_L}{d\Omega} = L; \qquad \frac{dX_C}{d\Omega} = \frac{1}{\Omega^2 C}$$

Ambos são positivos

$$\frac{dA}{d\Omega} = 0 \quad \Rightarrow \quad X_L + X_C = 0 \quad \Rightarrow \quad X_L = -X_C$$

- A posição do máximo é dada por

$$\Omega L = \frac{1}{\Omega C} \quad \Rightarrow \quad \Omega^2 = \frac{1}{LC} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\Omega = \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}}$$

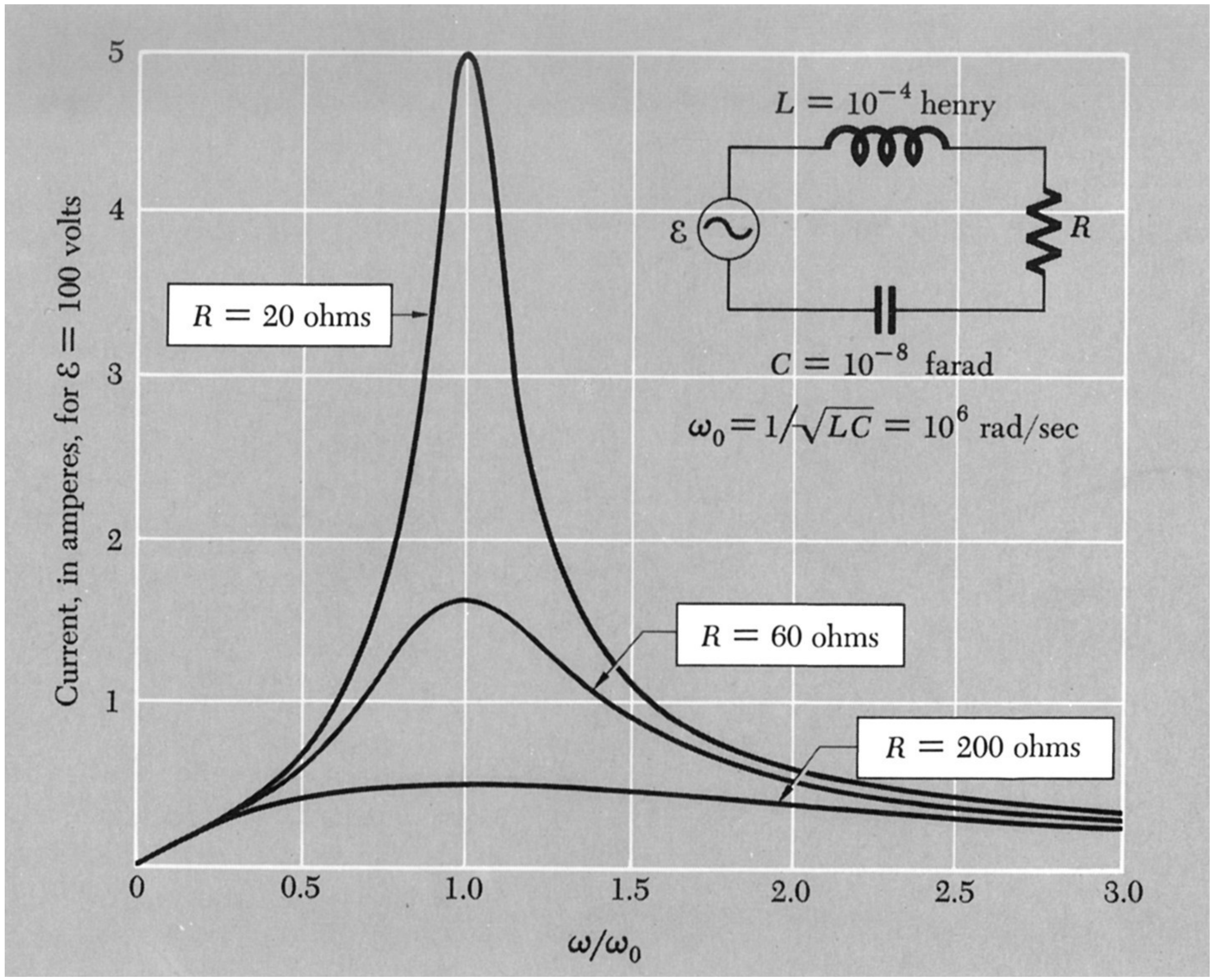
- Para $\Omega = \omega_0$

Condicões de Ressonância

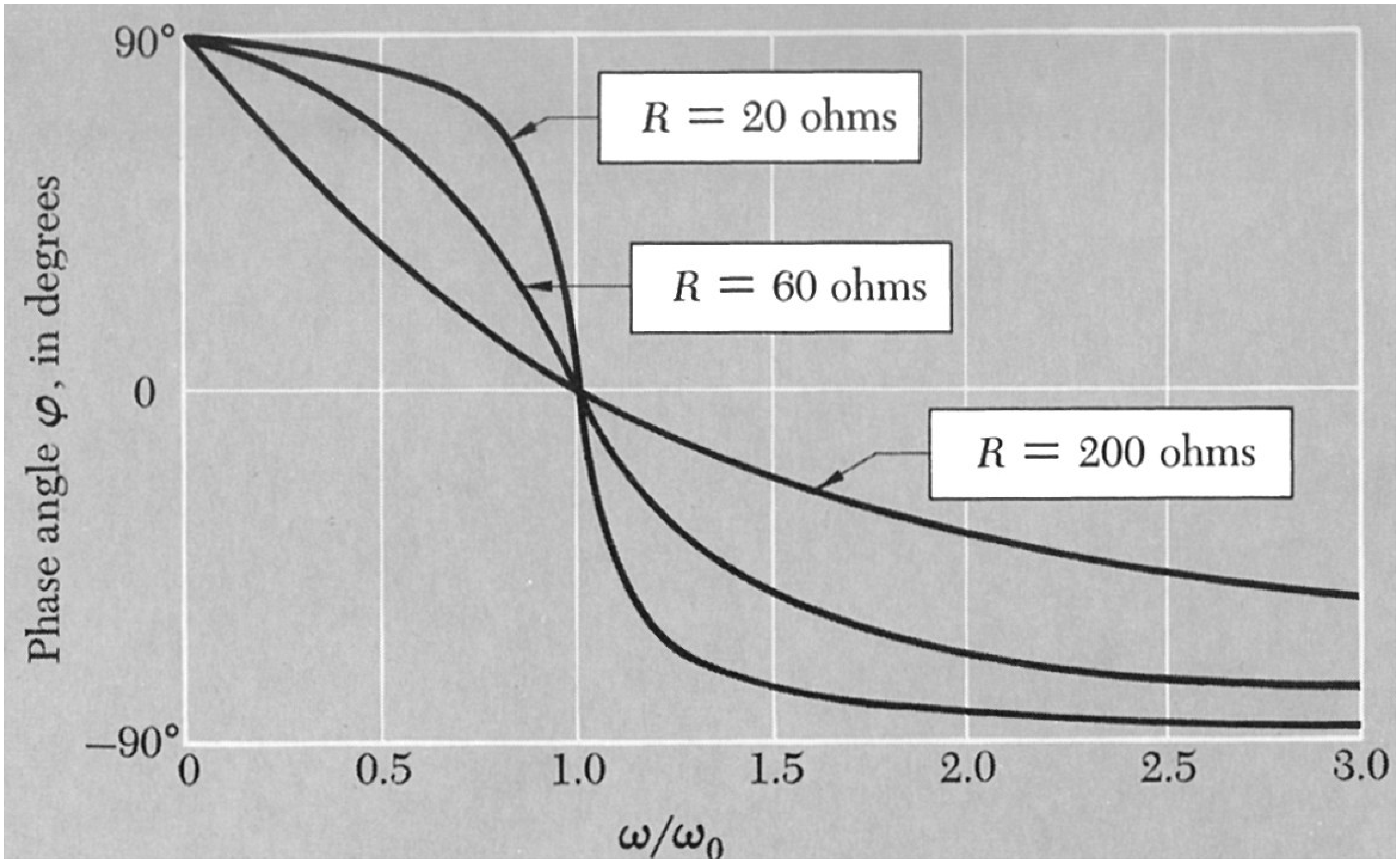
Na ressonância $$\boxed{A(\omega_0) = \frac{\epsilon_0}{R}} \qquad \boxed{\theta(\omega_0) = 0}$$

$$\Rightarrow \quad I(\omega_0) = \frac{\epsilon_0}{R}\cos(\omega_0 t)$$

Quanto menor for o valor da resistência R, mais alto será o pico



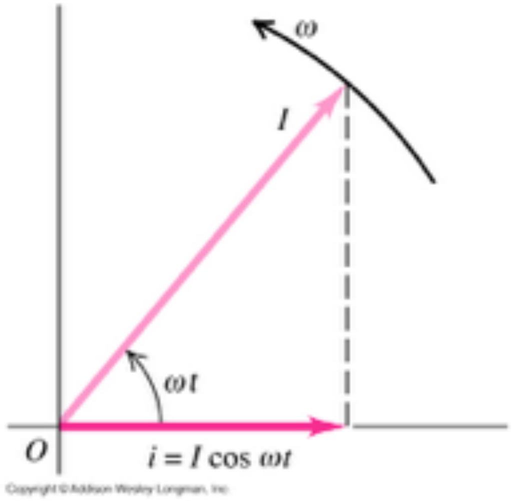
Ângulo de fase em graus



Fasores

Notação complexa permite uma análise simples

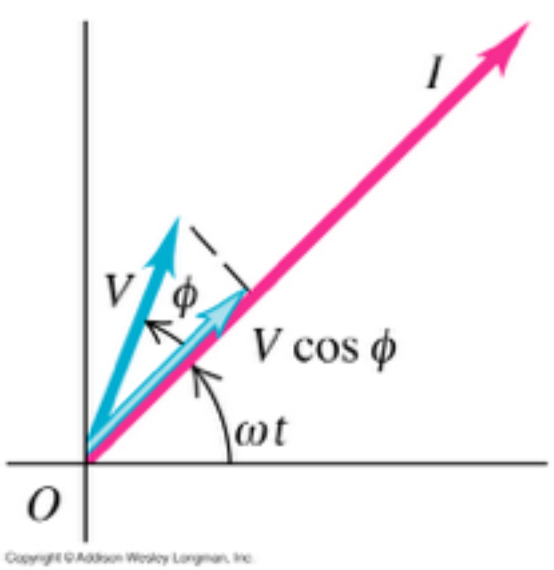
Dependência temporal da corrente: $\hat{I} = \bar{I}e^{i\Omega t}$



Dependência temporal da voltagem: $\hat{V} = \bar{V}e^{i\Omega t}$ onde $\bar{V} = V_0 e^{i\phi}$

Voltagem defasada em relação à corrente

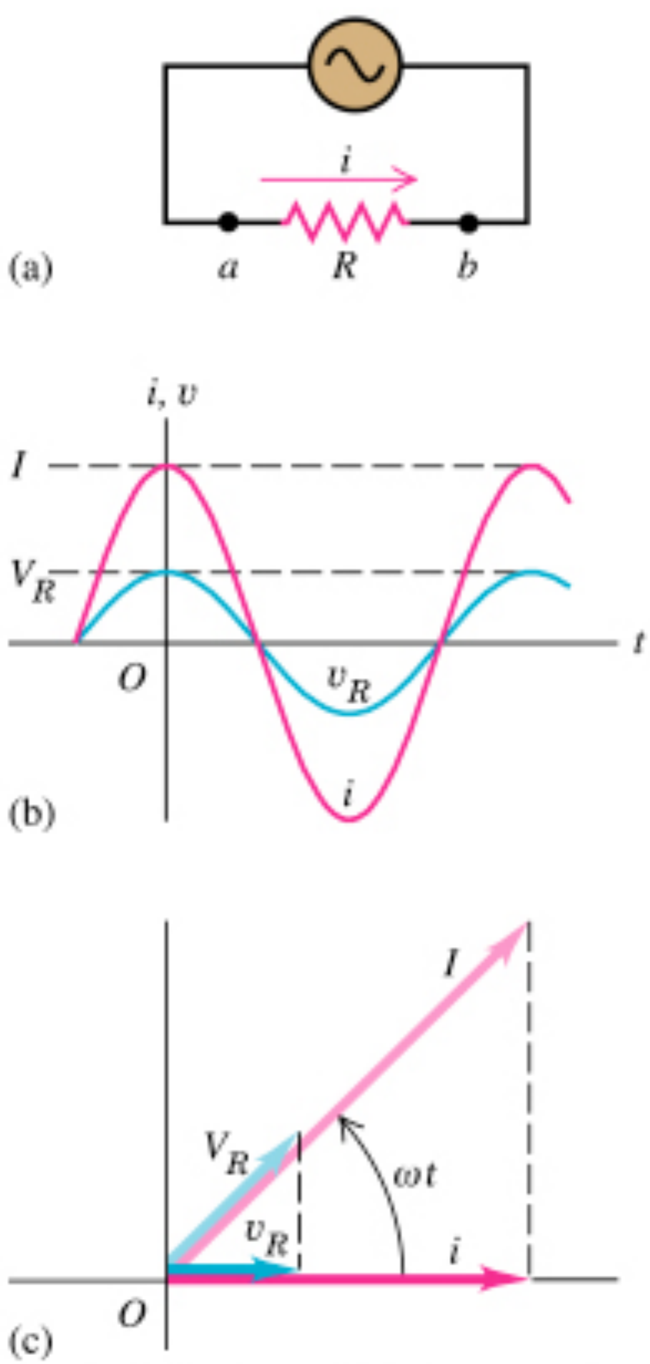
ϕ é a fase de V



$$\hat{V} = V_0 e^{i(\Omega t + \Phi)}$$

Circuito puramente resistivo

Em qq instante de tempo: $\epsilon - Ri = 0 \quad \Rightarrow \quad \epsilon = Ri$



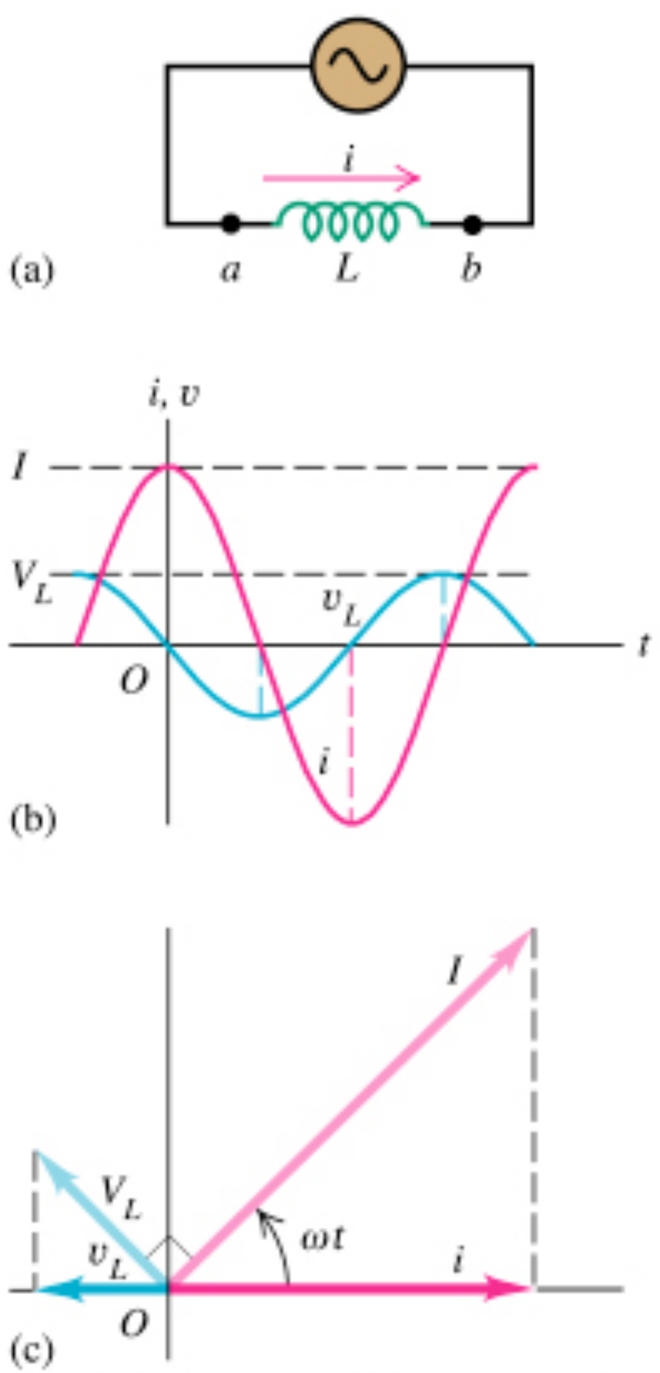
$$\tilde{I}(t) = \tilde{I}_0\, e^{i\Omega t}; \qquad \tilde{\epsilon}(t) = \epsilon_0\, e^{i\Omega t}$$

$$\tilde{\epsilon}(t) = R\,\tilde{I}(t); \qquad \tilde{\epsilon} = Z\tilde{I} \qquad \Rightarrow \qquad \boxed{Z_R = R}$$

- A impedância resistiva é a própria resistência (#real)
- A d.d.p. $\tilde{\epsilon}_R$ está em fase com a corrente $\tilde{I}$.

Circuito puramente indutivo

Em qq instante de tempo: $\epsilon - L\dfrac{di}{dt} = 0 \quad \Rightarrow \quad \epsilon = L\dfrac{di}{dt}$



$$\tilde{I}(t) = \tilde{I}_0\, e^{i\Omega t}; \qquad \tilde{\epsilon}(t) = \epsilon_0\, e^{i\Omega t}$$

$$L\frac{d\tilde{I}}{dt} = \tilde{\epsilon} = i\Omega\, L\, \tilde{I}; \quad \tilde{\epsilon} = Z\tilde{I} \quad \Rightarrow \quad \boxed{Z_L = i\Omega\, L}$$

- A impedância indutiva é puramente imaginária

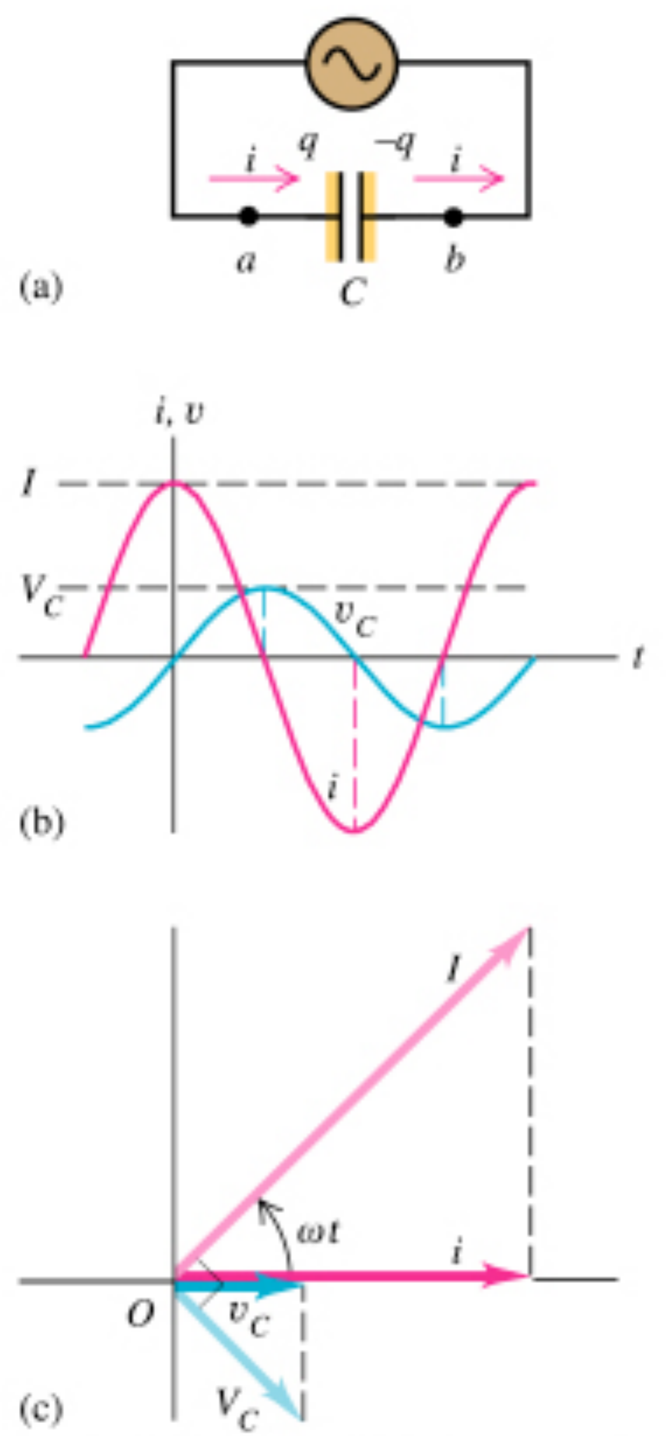
$$Z_L = iX_L \quad \Rightarrow \quad X_L = \Omega L$$

$$\tilde{\epsilon} = \Omega\, L\, e^{i\pi/2}\, \tilde{I} \quad \Rightarrow$$

- A d.d.p. $\tilde{\epsilon}_L$ está **adiantada** de $\dfrac{\pi}{2}$ em relação a $\tilde{I}$.

Circuito puramente capacitivo

Em qq instante de tempo: $\epsilon - \dfrac{q}{C} = 0 \quad \Rightarrow \quad \epsilon = \dfrac{q}{C} \quad \Rightarrow \quad q = C\epsilon$



$$i = \frac{dq}{dt} \quad \Rightarrow \quad i = C\frac{d\epsilon}{dt}$$

$$\tilde{I}(t) = \tilde{I}_0\, e^{i\Omega t}; \qquad \tilde{\epsilon}(t) = \epsilon_0\, e^{i\Omega t}$$

$$\tilde{I} = C\frac{d\tilde{\epsilon}}{dt} = i\Omega\, C\,\tilde{\epsilon}; \quad \tilde{\epsilon} = Z\tilde{I} \quad \Rightarrow \quad \boxed{Z_C = \frac{1}{i\Omega\, C}}$$

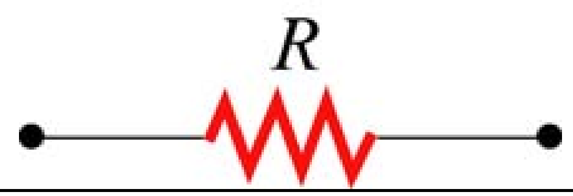
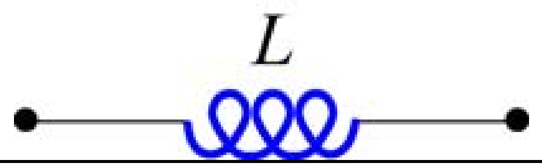
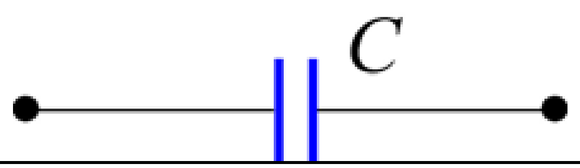
- A impedância capacitiva é puramente imaginária

$$Z_C = iX_C \quad \Rightarrow \quad X_C = -\frac{1}{\Omega\, C}$$

$$\tilde{\epsilon} = \left(\frac{1}{\Omega C}\right) e^{-i\frac{\pi}{2}}\,\tilde{I} \quad \Rightarrow$$

- A d.d.p. $\tilde{\epsilon}_C$ está **atrazada** de $\dfrac{\pi}{2}$ em relação a $\tilde{I}$.

Resumo

Circuit Elements	Resistance /Reactance	Current Amplitude	Phase angle ϕ
	R	$I_{R0} = \dfrac{V_0}{R}$	0
	$X_L = \omega L$	$I_{L0} = \dfrac{V_0}{X_L}$	$\pi/2$ current lags voltage by $90°$
	$X_C = \dfrac{1}{\omega C}$	$I_{C0} = \dfrac{V_0}{X_C}$	$-\pi/2$ current leads voltage by $90°$

Conexão de impedâncias em série

- A corrente que flui através dos elementos do circuito é a mesma

$$V = V_1 + V_2 = Z_1 I + Z_2 I = (Z_1 + Z_2) I$$

$$V_{eq} = Z_{eq} I \quad \Rightarrow \quad \boxed{Z_{eq} = Z_1 + Z_2}$$

* Nota: as impedâncias se somam como números complexos

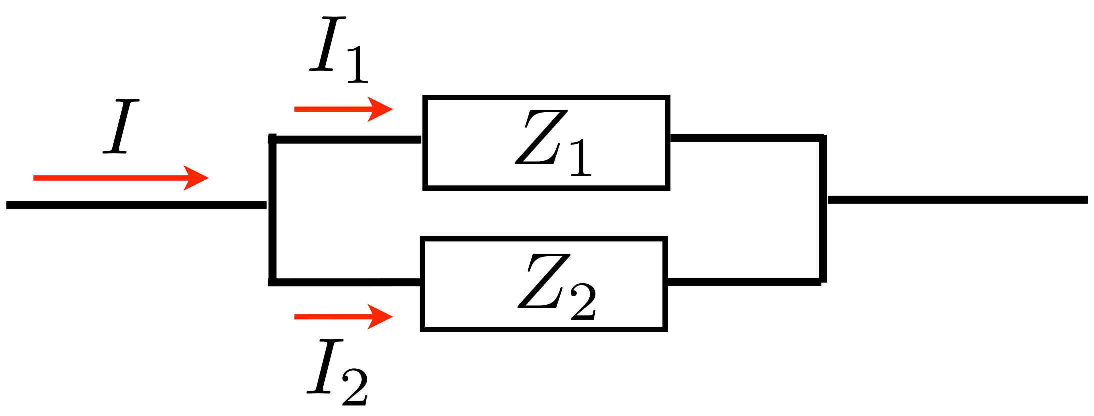
$$Z_1 = R_1 + iX_1; \;\; Z_2 = R_2 + iX_2 \quad \Rightarrow \quad Z_{eq} = (R_1 + R_2) + i\,(X_1 + X_2)$$

$$Z_{eq} = |Z_{eq}|\, e^{i\theta}$$

$$\boxed{|Z_{eq}| = \left[(R_1 + R_2)^2 + (X_1 + X_2)^2\right]^{1/2}} \qquad \boxed{\theta = \arctan\left(\frac{X_1 + X_2}{R_1 + R_2}\right)}$$

Conexão de impedâncias em paralelo

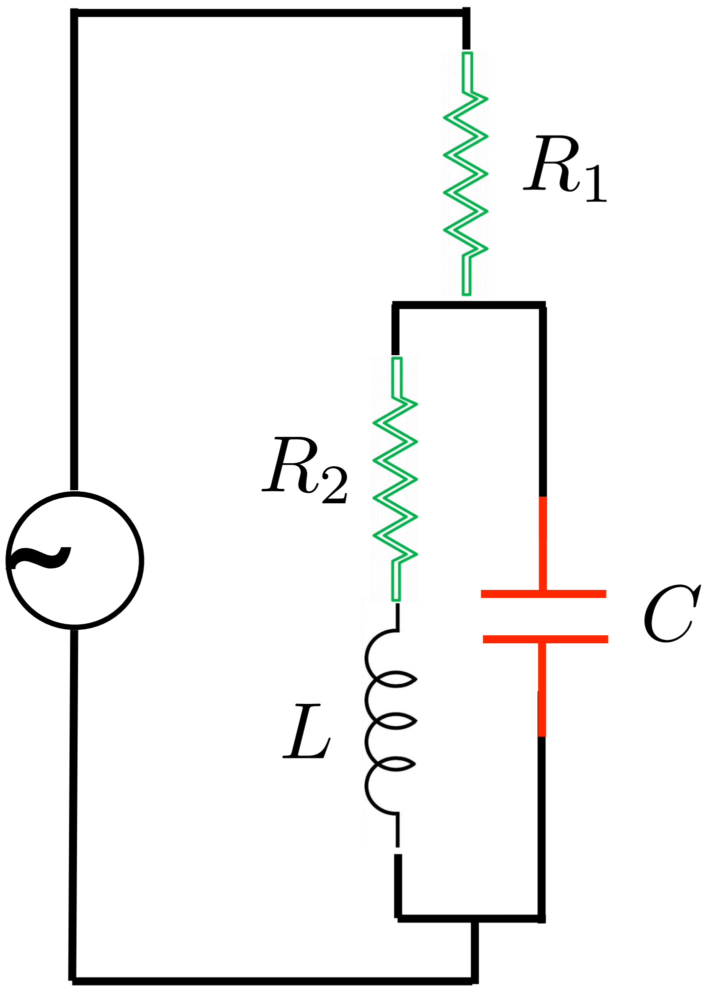
- A d.d.p. nos terminais dos elementos do circuito é a mesma e a corrente total é a soma das correntes que fluem através deles



$$I = I_1 + I_2 = \frac{V}{Z_1} + \frac{V}{Z_2} = \frac{V}{Z_{eq}} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\frac{1}{Z_{eq}} = \frac{1}{Z_1} + \frac{1}{Z_2}}$$

* Nota: mais uma vez, as impedâncias se somam como números complexos e a soma deve ser feita como tal.

Exemplo



$$Z = R_1 + Z'$$

$$\frac{1}{Z'} = \frac{1}{Z_C} + \frac{1}{Z''}$$

$$Z'' = R_2 + Z_L$$

$$Z = R_1 + \frac{1}{\frac{1}{Z'}}$$

$$Z = R_1 + \frac{1}{\frac{1}{Z_C} + \frac{1}{R_2 + Z_L}}$$

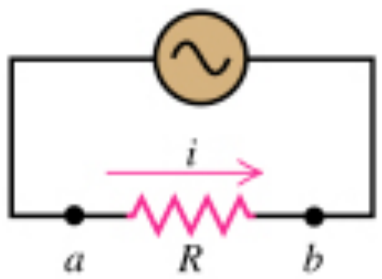
$$Z_L = i\Omega L; \qquad Z_C = \frac{1}{i\Omega C} \qquad \Rightarrow \qquad \boxed{Z = R_1 + \frac{1}{i\Omega C + \frac{1}{R_2 + i\Omega L}}}$$

$$Z = R + iX \qquad |Z| = \sqrt{R^2 + X^2} \qquad \theta = \arctan \frac{X}{R}$$

$$\boxed{\tilde{I} = \frac{\tilde{\epsilon}}{Z} = \frac{e^{-i\theta}\tilde{\epsilon}}{|Z|}}$$

Potência média em um circuito CA

Circuito puramente resistivo
$$P = \epsilon\, I = R\, I^2 = \frac{\epsilon^2}{R}$$



$$\epsilon = \epsilon_0\, sin(\omega t); \qquad I = I_0\, sin(\omega t) \qquad \Rightarrow$$

$$P = \epsilon_0\, I_0\, sin^2(\omega t) = R\, I_0^2\, sin^2(\omega t) = \frac{\epsilon_0^2}{R}\, sin^2(\omega t)$$

$$\langle P \rangle = \frac{1}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} P(t)dt = \frac{R\, I_0^2}{T}\underbrace{\int_{t_0}^{t_0+T} sin^2(\omega t)dt}_{\frac{T}{2}}$$

$$\boxed{\langle P \rangle = \frac{1}{2}\, R\, I_0^2 = \frac{1}{2}\, \epsilon_0\, I_0 = \frac{1}{2}\, \frac{\epsilon_0^2}{R}}$$

* Note a existência do fator 1/2.

Podemos definir a corrente eficaz (I_{ef} ou I_{rms}) e a tensão efetiva (ϵ_{ef} ou ϵ_{rms})

$$I_{ef} = \frac{I_0}{\sqrt{2}}; \qquad \epsilon_{ef} = \frac{\epsilon_0}{\sqrt{2}} \qquad \Rightarrow \qquad \langle P \rangle = R\, I_{ef}^2 = \epsilon_{ef}\, I_{ef} = \frac{\epsilon_{ef}^2}{R}$$

No Rio a tensão eficaz nas nossas residências é $\epsilon_{ef} = 127\,V \;\Rightarrow\; \epsilon_0 \approx 180\,V$

Amplitude da tensão

Potência média em um circuito geral CA

* **Em um circuito geral a corrente é defasada em relação à tensão**

$$\epsilon = \epsilon_0 \, sin(\Omega t); \qquad I = I_0 \, sin(\Omega t - \phi) \quad \Rightarrow$$

$$P = \epsilon \, I = \epsilon_0 I_0 \, sin(\Omega t) \, sin(\Omega t - \phi)$$

Utilizando a relação trigonométrica

$$sin(\Omega t - \phi) = sin(\Omega t) \, cos(\phi) - sin(\phi) \, cos(\Omega t)$$

obtemos

$$P = \epsilon_0 \, I_0 \, cos(\phi) \, sin^2(\Omega t) - \epsilon_0 \, I_0 \, sin(\phi) \, sin(\Omega t) \, cos(\Omega t)$$

A potência média

fator de potência

$$\boxed{\langle P \rangle = \frac{1}{2} \, \epsilon_0 \, I_0 \, cos(\phi) = \epsilon_{ef} \, I_{ef} \, cos(\phi)}$$

$$Z = R + iX \qquad \Rightarrow \qquad |Z| = \sqrt{R^2 + X^2}$$

$$cos(\phi) = \frac{R}{|Z|} = \frac{R}{\sqrt{R^2 + X^2}}$$

fator de potência

A potência média

$$\boxed{\langle P \rangle = \epsilon_{ef}\, I_{ef}\, \frac{R}{\sqrt{R^2 + X^2}}}$$